Compitino di algebra lineare del 31 maggio 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcola la forma di Jordan di A.

(2) Sia B una matrice complessa 4×4 tale che:

$$\mathrm{rk}(\mathrm{B} - 3\mathrm{I}) = 2, \quad \mathrm{rk}(\mathrm{B} + \mathrm{I}) = 3.$$

È vero che B deve essere simile ad A? Motiva la risposta (se è vero dimostralo, altrimenti fornisci un controesempio).

(3) Sia B una matrice complessa 4×4 tale che:

$$\det B = 9, \quad \mathrm{rk}(\mathrm{B} - 3\mathrm{I}) = 2, \quad \mathrm{rk}(\mathrm{B} + \mathrm{I}) = 3.$$

È vero che B deve essere simile ad A? Motiva la risposta (se è vero dimostralo, altrimenti fornisci un controesempio).

Esercizio 2.

(1) Scrivi la definizione di segnatura (di un prodotto scalare g su uno spazio vettoriale V reale di dimensione n).

(2) Considera la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina la segnatura del prodotto scalare $g_S(x, y) = {}^{\mathrm{t}}xSy$ su $\mathbb{R}^3$.

(3) Determina un piano $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $W^\perp \subset W$ con il prodotto scalare g_S.

Esercizio 3. Considera le rette affini

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scrivi una rototraslazione $f(x) = Ax + b$ tale che $f(s) = r$. Se puoi, descrivila prima geometricamente e poi calcola A e b.

Esercizio 4. Sia S una matrice simmetrica $n \times n$ tale che $S^2 = I$. Mostra che l'endomorfismo $L_S \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una riflessione ortogonale rispetto ad un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$. Come si calcola V a partire da S?

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Viene

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) No. Ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soddisfa le ipotesi ma non è simile ad A.

(3) È vero. La matrice B ha autovalore 3 con molteplicità geometrica 2 e -1 con molteplicità geometrica 1. Il determinante è il prodotto degli autovalori, quindi l'unica possibilità è che questi siano $3, 3, -1, -1$. Le molteplicità geometriche determinano in questo caso la matrice di Jordan di B che deve essere uguale a quella J di A.

Esercizio 2.

(1) Fatto a lezione.
(2) $(2, 1, 0)$.
(3) Basta prendere un vettore isotropo v ed un vettore w ortogonale a v. In tal caso, se $W = \mathrm{Span}(v, w)$ otteniamo $W^\perp = \mathrm{Span}(v)$. Ad esempio,

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il piano $W = \mathrm{Span}(v, w) = \{x = 0\}$ funziona. Non è l'unica soluzione possibile.

In alternativa, basta notare che la restrizione di g al piano $W = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$ è degenere. Quindi $W \cap W^\perp$ ha dimensione almeno uno. D'altra parte, siccome g è non degenere $\dim W + \dim W^\perp = 3$, quindi $\dim W^\perp = 1$ e allora $W^\perp$ è interamente contenuto in W.

Esercizio 3. Una rototraslazione di asse

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di angolo $\frac{\pi}{2}$ e di passo 1 funziona. Facendo i conti:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 4. Per il teorema spettrale L_S ha una base ortonormale di autovettori, rispetto alla quale l'endomorfismo si scrive come una matrice diagonale D. Siccome $D^2 = I$, gli autovalori sono solo ± 1. Quindi L_S è una riflessione rispetto all'autospazio $V = V_1$ con autovalore 1.